Eindeutigkeitsbeweis im Großen für die inkompressiblen magnetohydrodynamischen Gleichungen

Von E. Martensen

Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München

(Z. Naturforschg. **18 a**, 878 [1963]; eingegangen am 14. Juni 1963)

Hargitai und Szabó [1] haben kürzlich gezeigt, daß es höchstens eine aus Druck, Strömungsgeschwindigkeit und Magnetfeld bestehende Lösung der (nichtlinearen) magnetohydrodynamischen Gleichungen für eine inkompressible, zähe und elektrisch leitende Flüssigkeit geben kann, die zur Zeit $t=0$ in einem räumlichen Gebiet $\mathfrak{B}$ und für $0 \leqq t \leqq T_0$ auf dessen Berandung $\mathfrak{S}$ vorgeschriebene Werte annimmt. Dabei ist T_0 eine aus dem Beweisgang hervorgehende positive Größe, von der jedoch nicht bekannt ist, ob sie mit der oberen Grenze des a priori durch eine bestimmte Lösung gegebenen Zeitintervalls $0 \leqq t \leqq T$ identisch ist.

Die genannten Autoren legen die inkompressiblen magnetohydrodynamischen Differentialgleichungen in der transformierten Form

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} + (\mathfrak{w}, \operatorname{grad})\,\mathfrak{u} = -\operatorname{grad}\varphi + \alpha\,\Delta\mathfrak{u} + \beta\,\Delta\mathfrak{w}\,,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t} + (\mathfrak{u}, \operatorname{grad})\,\mathfrak{w} = -\operatorname{grad}\varphi + \alpha\,\Delta\mathfrak{w} + \beta\,\Delta\mathfrak{u}\,,$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{u} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathfrak{w} = 0$$

zugrunde, wobei zwischen den unbekannten Funktionen φ, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{w}$ und den eigentlich interessierenden Größen Druck, Strömungsgeschwindigkeit, Magnetfeld ein umkehrbar eindeutiger Zusammenhang besteht und die Konstanten α und β durch die kinematische und die magnetische Zähigkeit bestimmt sind. Es genügt daher, den Eindeutigkeitsbeweis für das angeführte transformierte Differentialgleichungssystem zu erbringen. Sind φ_1, $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{w}_1$ und φ_2, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{w}_2$ zwei in $\mathfrak{B}$ einschließlich $\mathfrak{S}$ und $0 \leqq t \leqq T$ erklärte Lösungen zu denselben Anfangs- und Randbedigungen, so wird für $\mathfrak{U} = \mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}_2$ und $\mathfrak{W} = \mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2$ die Ungleichung

$$\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathfrak{B}} (\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{W}^2)\,\mathrm{d}\tau \leqq \int_{\mathfrak{B}} A\,\mathrm{d}\tau \tag{1}$$

bewiesen, wobei der Skalar A dem Betrage nach durch

$$|A| \leqq 3\,M(\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{W}^2) \tag{2}$$

abgeschätzt werden kann ($M = \text{const} \geqq 0$). Die erwähnte Zahl $T_0 > 0$ ist nun dadurch erklärt, daß die linke Seite von (1) für alle $0 \leqq t \leqq T_0$ nichtnegativ ausfällt, und sicherlich gibt es immer ein solches T_0, da $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{W}$ für $t=0$ verschwinden. Für das so erhaltene Zeitintervall liefern nun (1) und (2)

$$\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathfrak{B}} (\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{W}^2)\,\mathrm{d}\tau \leqq 3\,M \int_{\mathfrak{B}} (\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{W}^2)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

und hieraus wird im weiteren Verlaufe der Arbeit das gewünschte Resultat $\mathfrak{U} = \mathfrak{W} = 0$ in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{S}$ für alle $0 \leqq t \leqq T_0$ hergeleitet.

Im folgenden soll gezeigt werden, wie man durch eine einfache Abänderung der Schlußweise den Eindeutigkeitsbeweis im Großen, d. h. für alle $0 \leqq t \leqq T$ bekommen kann.

Durch Integration der Ungleichung (1) von $t=0$ (dort gilt $\mathfrak{U} = \mathfrak{W} = 0$) bis zu einem beliebigen t aus $0 \leqq t \leqq T$ entsteht

$$\tfrac{1}{2}\int_{\mathfrak{B}} (\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{W}^2)\,\mathrm{d}\tau \leqq \int_0^t \int_{\mathfrak{B}} A\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t\,. \tag{3}$$

Da die rechte Seite offensichtlich stets nichtnegativ ist, hat man

$$\int_0^t \int_{\mathfrak{B}} A\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t = \left|\int_0^t \int_{\mathfrak{B}} A\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t\right| \leqq \int_0^t \int_{\mathfrak{B}} |A|\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t\,,$$

so daß im Zusammenhang mit (2) und (3) folgt

$$\tfrac{1}{2}\int_{\mathfrak{B}} (\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{W}^2)\,\mathrm{d}\tau \leqq 3\,M \int_0^t \int_{\mathfrak{B}} (\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{W}^2)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t\,.$$

Die durch

$$f(t) = \int_0^t \int_{\mathfrak{B}} (\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{W}^2)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

im Intervall $0 \leqq t \leqq T$ erklärte (stetig differenzierbare) Funktion hat somit folgende Eigenschaften:

$$f(0) = 0\,, \qquad f'(t) \geqq 0\,, \tag{5), (6}$$

$$f'(t) \leqq 6\,M\,f(t)\,. \tag{7}$$

Da $f(t)$ wegen (5) und (6) nichtnegativ und monoton nicht fallend ist, gibt es nur die beiden folgenden Möglichkeiten: Entweder verschwindet $f(t)$ identisch in $0 \leqq t \leqq T$, oder aber es gibt eine Stelle t_0 mit $0 \leqq t_0 < T$ derart, daß

$$f(t) = 0\,, \quad \text{falls} \quad 0 \leqq t \leqq t_0\,,$$

$$f(t) > 0\,, \quad \text{falls} \quad t_0 < t \leqq T\,.$$

Nehmen wir an, daß letzteres zutrifft. Ist dann t_1 eine Zahl mit $t_0 < t_1 \leqq T$, so gilt $f(t) > 0$ für alle $t_1 \leqq t \leqq T$ und damit als Folge von (7)

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\mathrm{d}\ln f(t)}{\mathrm{d}t} \leqq 6\,M\,.$$

Integration dieser Ungleichung von t_1 bis T, anschließender Übergang zur Exponentialfunktion und Multiplikation mit $f(t_1) > 0$ liefert

$$f(T) \leqq f(t_1)\,e^{6\,M(T-t_1)}\,.$$

Wählt man nun $t_1 > t_0$ nahe genug an t_0, so läßt sich die rechte Seite wegen $f(t_0) = 0$ unter jede positive Schranke drücken, was einen Widerspruch zu $f(T) > 0$ ergibt. Somit verschwindet $f(t)$ identisch in $0 \leqq t \leqq T$. Laut (4) ist dann insbesondere

$$f(T) = \int_0^T \int_{\mathfrak{B}} (\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{W}^2)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t = 0\,,$$

woraus $\mathfrak{U} = \mathfrak{W} = 0$ in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{S}$ für alle $0 \leqq t \leqq T$ resultiert.

An dem Beweis, daß auch $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$ verschwindet [1], ändert sich nichts: Die magnetohydrodynamischen Gleichungen ergeben wegen $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{w}_1 = \mathfrak{w}_2$ unmittelbar $\operatorname{grad}\Phi = 0$ in $\mathfrak{B}$; Φ ist also eine reine Zeitfunktion, die jedoch verschwindet, da Φ auf dem Rande $\mathfrak{S}$ für alle $0 \leqq t \leqq T$ verschwinden muß.

[1] Cs. Hargitai u. J. Szabó, Z. Naturforschg. **16 a**, 92 [1961].