

Eindeutigkeitsbeweis im Großen für die inkompressiblen magnetohydrodynamischen Gleichungen

Von E. MARTENSEN

Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München
(Z. Naturforsch. 18 a, 878 [1963]; eingegangen am 14. Juni 1963)

HARGITAI und SZABÓ¹ haben kürzlich gezeigt, daß es höchstens eine aus Druck, Strömungsgeschwindigkeit und Magnetfeld bestehende Lösung der (nichtlinearen) magnetohydrodynamischen Gleichungen für eine inkompressible, zähe und elektrisch leitende Flüssigkeit geben kann, die zur Zeit $t=0$ in einem räumlichen Gebiet \mathfrak{B} und für $0 \leq t \leq T_0$ auf dessen Berandung \mathfrak{S} vorgeschriebene Werte annimmt. Dabei ist T_0 eine aus dem Beweisgang hervorgehende positive Größe, von der jedoch nicht bekannt ist, ob sie mit der oberen Grenze des a priori durch eine bestimmte Lösung gegebenen Zeitintervalls $0 \leq t \leq T$ identisch ist.

Die genannten Autoren legen die inkompressiblen magnetohydrodynamischen Differentialgleichungen in der transformierten Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (w, \text{grad})u &= -\text{grad} \varphi + \alpha \Delta u + \beta \Delta w, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + (u, \text{grad})w &= -\text{grad} \varphi + \alpha \Delta w + \beta \Delta u, \end{aligned}$$

$$\text{div } u = 0, \quad \text{div } w = 0$$

zugrunde, wobei zwischen den unbekannten Funktionen φ , u , w und den eigentlich interessierenden Größen Druck, Strömungsgeschwindigkeit, Magnetfeld ein umkehrbar eindeutiger Zusammenhang besteht und die Konstanten α und β durch die kinematische und die magnetische Zähigkeit bestimmt sind. Es genügt daher, den Eindeutigkeitsbeweis für das angeführte transformierte Differentialgleichungssystem zu erbringen. Sind φ_1 , u_1 , w_1 und φ_2 , u_2 , w_2 zwei in \mathfrak{B} einschließlich \mathfrak{S} und $0 \leq t \leq T$ erklärte Lösungen zu denselben Anfangs- und Randbedingungen, so wird für $U = u_1 - u_2$ und $W = w_1 - w_2$ die Ungleichung

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{B}} (U^2 + W^2) d\tau \leq \int_{\mathfrak{B}} A d\tau \quad (1)$$

bewiesen, wobei der Skalar A dem Betrage nach durch

$$|A| \leq 3M(U^2 + W^2) \quad (2)$$

abgeschätzt werden kann ($M = \text{const} \geq 0$). Die erwähnte Zahl $T_0 > 0$ ist nun dadurch erklärt, daß die linke Seite von (1) für alle $0 \leq t \leq T_0$ nichtnegativ ausfällt, und sicherlich gibt es immer ein solches T_0 , da U und W für $t=0$ verschwinden. Für das so erhaltene Zeitintervall liefern nun (1) und (2)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{B}} (U^2 + W^2) d\tau \leq 3M \int_{\mathfrak{B}} (U^2 + W^2) d\tau,$$

und hieraus wird im weiteren Verlaufe der Arbeit das gewünschte Resultat $U = W = 0$ in \mathfrak{B} und \mathfrak{S} für alle $0 \leq t \leq T_0$ hergeleitet.

¹ Cs. HARGITAI u. J. SZABÓ, Z. Naturforsch. 16 a, 92 [1961].

Im folgenden soll gezeigt werden, wie man durch eine einfache Abänderung der Schlußweise den Eindeutigkeitsbeweis im Großen, d. h. für alle $0 \leq t \leq T$ bekommen kann.

Durch Integration der Ungleichung (1) von $t=0$ (dort gilt $U=W=0$) bis zu einem beliebigen t aus $0 \leq t \leq T$ entsteht

$$\frac{1}{2} \int_{\mathfrak{B}} (U^2 + W^2) d\tau \leq \int_0^t \int_{\mathfrak{B}} A d\tau dt. \quad (3)$$

Da die rechte Seite offensichtlich stets nichtnegativ ist, hat man

$$\int_0^t \int_{\mathfrak{B}} A d\tau dt = \left| \int_0^t \int_{\mathfrak{B}} A d\tau dt \right| \leq \int_0^t \int_{\mathfrak{B}} |A| d\tau dt,$$

so daß im Zusammenhang mit (2) und (3) folgt

$$\frac{1}{2} \int_{\mathfrak{B}} (U^2 + W^2) d\tau \leq 3M \int_0^t \int_{\mathfrak{B}} (U^2 + W^2) d\tau dt.$$

Die durch

$$f(t) = \int_0^t \int_{\mathfrak{B}} (U^2 + W^2) d\tau dt \quad (4)$$

im Intervall $0 \leq t \leq T$ erklärte (stetig differenzierbare) Funktion hat somit folgende Eigenschaften:

$$f(0) = 0, \quad f'(t) \geq 0, \quad (5), \quad (6)$$

$$f'(t) \leq 6Mf(t). \quad (7)$$

Da $f(t)$ wegen (5) und (6) nichtnegativ und monoton nicht fallend ist, gibt es nur die beiden folgenden Möglichkeiten: Entweder verschwindet $f(t)$ identisch in $0 \leq t \leq T$, oder aber es gibt eine Stelle t_0 mit $0 \leq t_0 < T$ derart, daß

$$\begin{aligned} f(t) &= 0, & \text{falls } 0 \leq t \leq t_0, \\ f(t) &> 0, & \text{falls } t_0 < t \leq T. \end{aligned}$$

Nehmen wir an, daß letzteres zutrifft. Ist dann t_1 eine Zahl mit $t_0 < t_1 \leq T$, so gilt $f(t) > 0$ für alle $t_1 \leq t \leq T$ und damit als Folge von (7)

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{d \ln f(t)}{dt} \leq 6M.$$

Integration dieser Ungleichung von t_1 bis T , anschließender Übergang zur Exponentialfunktion und Multiplikation mit $f(t_1) > 0$ liefert

$$f(T) \leq f(t_1) e^{6M(T-t_1)}.$$

Wählt man nun $t_1 > t_0$ nahe genug an t_0 , so läßt sich die rechte Seite wegen $f(t_0) = 0$ unter jede positive Schranke drücken, was einen Widerspruch zu $f(T) > 0$ ergibt. Somit verschwindet $f(t)$ identisch in $0 \leq t \leq T$. Laut (4) ist dann insbesondere

$$f(T) = \int_0^T \int_{\mathfrak{B}} (U^2 + W^2) d\tau dt = 0,$$

woraus $U = W = 0$ in \mathfrak{B} und \mathfrak{S} für alle $0 \leq t \leq T$ resultiert.

An dem Beweis, daß auch $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$ verschwindet¹, ändert sich nichts: Die magnetohydrodynamischen Gleichungen ergeben wegen $u_1 = u_2$, $w_1 = w_2$ unmittelbar $\text{grad } \Phi = 0$ in \mathfrak{B} ; Φ ist also eine reine Zeitfunktion, die jedoch verschwindet, da Φ auf dem Rande \mathfrak{S} für alle $0 \leq t \leq T$ verschwinden muß.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.